©2005. І.М. Конет

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ІНВАРІАНТНИХ $\Lambda_{(\mu)}$-ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

На спеціальних ріманових многовидах для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичних операторів запроваджено інтегральні перетворення з невідокремленими змінними, що дало можливість одержати аналітичні зображення фундаментальних розв'язків для $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичних рівнянь та систем рівнянь інваріантних відносно групи обертань навколо початку координат евклідового простору E_n.

Дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методом відображення в областях з негладкою межею приводить до побудови фундаментальних розв'язків на ріманових многовидах спеціальної конструкції. Одержати аналітичне зображення фундаментальних розв'язків для достатньо широкого класу рівнянь можна методом інтегрального перетворення з невідокремленими змінними, заснованому на спеціальному зображенні міри Дірака (дельта-функції Дірака).

1. Інтегральне перетворення з невідокремленими змінними. Розглянемо евклідів простір $E_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n); -\infty < x_j < +\infty; j = \overline{1,n}\}$ Віддаль між точками $x \in E_n$ та $\xi \in E_n$ позначимо через $R = \left|x - \xi\right| = \left[\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \xi_j)^2\right]^{1/2}$, а через $\omega_n = 2(\pi)^{n/2}\left[\Gamma(n/2)\right]^{-1}$ позначимо величину площі одиничної сфери в E_n. В книзі [1] одержано інтегральне зображення міри Дірака в E_n:

$$\delta(x-\xi) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda. \tag{1}$$

Тут бере участь нормована функція Бесселя 1-го роду [2]

$$j_\nu(x) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)x^{-\nu}J_\nu(x), \quad j_\nu(0) = 1, \quad j'_\nu(0) = 0, \quad 2\nu + 1 \geq 0.$$

При цьому справджується тотожня рівність [2];

$$\Delta_n\left[j_{(n-2)/2}(\lambda R)\right] \equiv \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[j_{(n-2)/2}(\lambda R)\right] = -\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R). \tag{2}$$

Розгялнемо узагальнений диференціальний оператор Лежандра [3]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dy^2} + cthy\frac{d}{dy} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1^2}{1-chy} + \frac{\mu_2^2}{1+chy}\Big),\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0,\ (\mu) = (\mu_1, \mu_2).$$

Визначимо величини та функції [3,4]:

$$\nu^\pm = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2), \quad \Omega_{(\mu)}(\beta) = \beta \cdot 2^{\mu_1-\mu_2}(2\pi^2)^{-1}sh2\pi\beta\times$$

$$\times\Big|\Gamma(\frac{1}{2} - \nu^+ + i\beta)\Big|^2\Big|\Gamma(\frac{1}{2} - \nu^- + i\beta)\Big|^2,$$

$\Gamma(x)$ - "гамма-функція"Ейлера, $\beta \in (0, \infty)$.

В монографії [4] одержано інтегральне зображення міри Дірака, породженої оператором $\Lambda_{(\mu)}$:

$$\delta(y-\eta) = \int_0^\infty P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(ch\eta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta \cdot sh\eta. \tag{3}$$

У рівності (3) бере участь узагальнена приєднана функція Лежандра першого роду $P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy)$ як обмежений на множині $(0, \infty)$ розв'язок узагальненого диференціального рівняння Лежандра [3]

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + \beta^2\right) u(y) = 0. \tag{4}$$

Якщо тепер розглянути евклідів простір $E^+_{n+1} = \{(x, y) : x_j \in (-\infty, \infty), j = \overline{1, n};\ y \in (0, \infty)\}$, то на основі тензорного добутку узагальнених функцій [5] маємо інтегральне зображення міри Дірака в E^+_{n+1}:

$$\delta(x-\xi)\otimes\delta(y-\eta) \equiv \delta(x-\xi, y-\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda \times \tag{5}$$

$$\times \int_0^\infty \varphi_\mu(y, \eta, \beta)d\beta sh\eta = \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_\mu(y, \eta, \beta) j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta sh\eta.$$

Тут прийнято позначення:

$$\varphi_\mu(y, \eta, \beta) = P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(ch\eta)\Omega_{(\mu)}(\beta).$$

Інтегральне зображення (5) міри Дірака визначає пряме $H_{n,(\mu)}$ і обернене $H^{-1}_{n,(\mu)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Лежандра [6]:

$$H_{n,(\mu)}[f(\xi, \eta)] = \int_0^\infty\int_{E_n} f(\xi, \eta) j_{(n-2)/2}(\lambda R(x, \xi)) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(ch\eta) d\xi sh\eta d\eta \equiv$$

$$\equiv \tilde{f}(\lambda, x, \beta), \tag{6}$$

$$H^{-1}_{n,(\mu)}[\tilde{f}(\lambda, x, \beta)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda, x, \beta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \equiv$$

$$\equiv f(x, y). \tag{7}$$

При цьому мають місце тотожності:

$$H_{n,(\mu)}[\Lambda_{(\mu)}[f]] = -\beta^2\tilde{f}, \quad H_{n,(\mu)}[\Delta_n f] = -\lambda^2\tilde{f}. \tag{8}$$

Ми вважаємо, що функція $f(x, y)$ володіє потрібними властивостями.

Узагальнимо запроваджене формулами (6), (7) інтегральне перетворення на випадок спеціального ріманового многовиду $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$, побудованого в роботі [2].

Нехай $R_2^{(m)}$ - ріманова поверхня функції $\omega = \sqrt[m]{z} \equiv \sqrt[m]{x_1 + ix_2}$ для $m \in [2, \infty)$, $R_2^{(\infty)}$ - ріманова поверхня функції $w = lnz = \lim\limits_{m\to\infty} m \left(\sqrt[m]{z} - 1\right)$. В $R_2^{(m)}$ будемо користуватися полярними координатами (r, φ): $r \in (0, \infty)$, $0 \le \varphi \le 2\pi m$; $\varphi = \varphi mod(2\pi m)$. Якщо E_{n-1}^+ - евклідів півпростір точок $\{(x_3, x_4, ..., x_n, y) : x_j \in (-\infty, +\infty),\ j = \overline{3, n};\ \ y \in (0, \infty)\}$, то ріманів многовид

$$\overset{+(m)}{R}_{n+1} = R_2^{(m)} \times E_{n-1}^+, \quad \overset{+(\infty)}{R}_{n+1} = R_2^{(\infty)} \times E_{n-1}^+.$$

Таким чином, положення змінної точки в $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ визначається параметрами $(r, \varphi, x_3, x_4, ..., x_n, y)$, а положення фіксованої точки (ξ, η) - параметрами $(\rho, \varphi_0, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n, \eta)$. Точку, яка лежить на k-ім екземплярі $\overset{+(k)}{R}_{n+1} = R_2^{(k)} \times E_{n-1}^+$ ріманового многовиду $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ позначимо через (x^k, y). При цьому перший екземпляр ріманового многовиду $\overset{+(k)}{R}_{n+1}$ будемо ототожнювати з евклідовим півпростором E_{n+1}^+ [2].

Згідно з роботою [2] визначимо функції:

$$R(x, \xi) = \left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi_0) + \sum_{k=3}^{n}(x_k - \xi_k)^2\right]^{1/2},$$

$$R_1(x, \xi) = \left[r^2 + \rho^2 + 2r\rho ch\alpha + \sum_{k=3}^{n}(x_k - \xi_k)^2\right]^{1/2},$$

$$K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0) = \frac{\sin\frac{\pi + \varphi - \varphi_0}{m}}{ch\frac{\alpha}{m} - \cos\frac{\pi + \varphi - \varphi_0}{m}} + \frac{\sin\frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{m}}{ch\frac{\alpha}{m} - \cos\frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{m}},$$

$$J(\varphi - \varphi_0) = \begin{cases} 1, & |\varphi - \varphi_0| < \pi \\ 0, & |\varphi - \varphi_0| > \pi \end{cases},$$

$$K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0) = \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{\alpha^2 + (\pi + \varphi - \varphi_0)^2} + \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{\alpha^2 + [\pi - (\varphi - \varphi_0)]^2},$$

$$\Phi_{(m)} = j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0)d\alpha \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{m}\Big[j_{(n-2)/2}(\lambda R) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Big(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\Big)K_m(\alpha, \varphi - \varphi_0)d\alpha\Big], \tag{9}$$

$$\Phi_{(\infty)} = j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0)d\alpha \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Big(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_{(\infty)}(\alpha, \varphi - \varphi_0)d\alpha. \tag{10}$$

Згідно з роботою [2] маємо:

1) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0)\lambda^{n-1} d\lambda d\beta, \tag{11}$$

2) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $\overset{+(\infty)}{R}_{n+1}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_{(\infty)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0)\lambda^{n-1} d\lambda d\beta, \tag{12}$$

Інтегральне зображення (11) міри Дірака породжує пряме $H^{(m)}_{n,(\mu)}$ і обернене $H^{-(m)}_{n,(\mu)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопала на $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ $\Big(m \in [2,\infty)\Big)$:

$$H^{(m)}_{n,(\mu)}[g(\xi,\eta)] = \int_0^\infty \int_{\overset{+(m)}{R}_{n+1}} g(\xi,\eta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(ch\eta)\Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) sh\eta d\eta d\sigma \equiv$$

$$\equiv \tilde{g}(\lambda, x, \beta), \tag{13}$$

$$H^{-(m)}_{n,(\mu)}[\tilde{g}(\lambda, x, \beta)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda, x, \beta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1} d\beta d\lambda \equiv$$

$$\equiv g(x,y). \tag{14}$$

Інтегральне зображення (12) міри Дірака породжує відповідно пряме $H^{(\infty)}_{n,(\mu)}$ і обернене $H^{-(\infty)}_{n,(\mu)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопала на $\overset{+(\infty)}{R}_{n+1}$:

$$H^{(\infty)}_{n,(\mu)}[g(\xi,\eta)] = \int_0^\infty \int_{\overset{+(\infty)}{R}_{n+1}} g(\xi,\eta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(ch\eta)\Phi_{(\infty)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \times$$

$$\times sh\eta d\eta d\sigma \equiv \tilde{g}(\lambda, x, \beta), \tag{15}$$

$$H^{-(\infty)}_{n,(\mu)}[\tilde{g}(\lambda, x, \beta)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{g}(\lambda, x, \beta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(chy) \times$$

$$\times \Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1} d\lambda d\beta \equiv g(x,y). \tag{16}$$

У рівностях (13), (15) $d\sigma$ - елемент площі на рімановім многовиді.
При цьому для $m \in [2,\infty]$ мають місце тотожності:

$$H^{(m)}_{n,(\mu)}[\Delta_n g] = -\lambda^2 H^{(m)}_{n,(\mu)}[g]; \quad H^{(m)}_{n,(\mu)}[\Lambda_{(\mu)} g] = -\beta^2 H^{(m)}_{n,(\mu)}[g]. \tag{17}$$

2. Побудова фундаментальних розв'язків для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$- еліптичних операторів.

В $\overset{+}{E}_{n+1}$ розглянемо інваріантне відносно групи обертань $O(n)$ $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичне рівняння

$$L[u] \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)})u = -f(x,y), \tag{18}$$

де $A_\ell = 1$, $A_k(z_1, z_2)$ зображаються всюди збіжними рядами в просторі $\mathbb{C}^2$ комплексних змінних (z_1, z_2).

У результаті застосування до рівняння (18) інтегрального оператора $H_{n,(\mu)}$ за правилом (6) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2, -\beta^2)\tilde{u} = -\tilde{f}.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u} = -\frac{\tilde{f}(\lambda, x, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)}, \quad P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2) = \sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2, -\beta^2). \tag{19}$$

Застосувавши до функції $\tilde{u}$, визначеної формулою (19), за правилом (7) оператор $H^{-1}_{n,(\mu)}$, маємо єдиний розв'язок рівняння (18):

$$u(x,y) = \int_0^\infty \int_{E_n} \mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) f(\xi, \eta) sh\eta d\xi d\eta. \tag{20}$$

Тут бере участь фундаментальна функція

$$\mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)} j_{(n-2)/2}(\lambda R(x, \xi)) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta \tag{21}$$

оператора L.

Для рівняння Лапласа з оператором $\Lambda_{(\mu)}$

$$\Big(\Delta_n + \Lambda_{(\mu)}\Big) u = 0 \tag{22}$$

фундаментальний розв'язок згідно формули (21) має структуру:

$$\mathcal{E}(x, \xi, y, \eta) \equiv \mathcal{E}(R, y, \eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{\lambda^2 + \beta^2} j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\lambda d\beta. \tag{23}$$

За викладеною вище схемою методом інтегрального перетворення типу Бохнера-Шестопала будуються фундаментальні розв'язки для рівняння (18) на ріманових многовидах $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ для $m \in [2, \infty]$:

$$\mathcal{E}_{(m)}(x, \xi; y, \eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)}{P_\ell(-\lambda^2, -\beta^2)} \Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi - \varphi_0) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda. \tag{24}$$

Якщо в рівності (23) покласти $P_\ell = -(\lambda^2 + \beta^2)$, то одержимо структуру фундаментального розв'язку для рівняння Лапласа (23) на рімановім многовиді $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ для $m \in [2, \infty)$ та на рімановім многовиді $\overset{+(\infty)}{R}_{n+1}$, замінивши формально $\Phi_{(m)}$ на $\Phi_{(\infty)}$.

Розглянемо тепер строго еліптичну за І.Г. Петровським інваріантну відносно групи обертань $O(n)$ систему рівнянь з оператором $\Lambda_{(\mu)}$ ($\Lambda_{(\mu)}$ - еліптична система рівнянь):

$$\sum_{j=1}^{\ell} P_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \Lambda_{(\mu)}\Big) u_j(x_1, x_2, ..., x_n; y) =$$

$$= -f_i(x_1, x_2, ..., x_n, y), \quad i = \overline{1, \ell} \tag{25}$$

У формулі (25) беруть участь диференціальні многочлени

$$P_{ij} = \sum_{2|k| + k_{n+1} \le 2m} a_{k_1 k_2 \cdots k_n k_{m+1}} D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \cdots D_{x_n}^{k_n} \Lambda_{(\mu)}^{k_{n+1}}, \quad i, j = \overline{1, \ell},$$

$$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Означення 1. $\Lambda_{(\mu)}$-еліптична система (25) називається інваріантною відносно групи обертань $O(n)$, якщо характеристичний многочлен матриці системи

$$detA(-i\lambda_1, -i\lambda_2, ..., -i\lambda_n, -\beta^2) \equiv det\Big\{P_{ij}(-i\lambda_1, ..., -i\lambda_n, -\beta^2)\Big\}_{i,j=1}^{\ell} =$$

$$= P_{2m\ell}(-\lambda^2, -\beta^2). \tag{26}$$

Тут $\lambda^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$, $P_{2m\ell}$ - многочлен степеня $2m\ell$ від двох змінних (z_1, z_2).

Для інваріантних систем (25) завжди можна знайти єдину диференціальну матрицю Θ розміру $\ell \times \ell$ таку, що система набуде канонічної форми

$$Au = A\Theta v = P_{2m\ell}\Big(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big) E_\ell v, \tag{27}$$

де E_ℓ - одинична матриця розміру $\ell \times \ell$.

Рівність (27) означає, що інваріантна відносно групи обертань $O(n)$ строго $\Lambda_{(\mu)}$-еліптична за І.Г. Петровським система рівнянь (25) приводиться до одного рівняння вигляду

$$P_{2m\ell}\Big(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big) v_j \equiv \Big(\sum_{i=0}^{2m\ell} b_i \Delta_n^{2m\ell - i} \Lambda_{(\mu)}^i\Big) v_j = -f_j; \quad j = \overline{1, \ell}. \tag{28}$$

Означення 2. Фундаментальною матрицею розв'язків для системи (25) назвемо таку матрицю $E(x, \xi; y, \eta)$ розміру $\ell \times \ell$, яка в розумінні теорії узагальнених функцій задовольняє рівняння

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}; \Lambda_{(\mu)}\Big) E = -\delta(x - \xi) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell \equiv$$

$$\equiv \delta(x_1 - \xi_1) \otimes \delta(x_2 - \xi_2) \otimes \cdots \otimes \delta(x_n - \xi_n) \otimes (sh\eta)^{-1} \delta(y - \eta) E_\ell, \tag{29}$$

де знак $\otimes$ означає тензорний добуток функціоналів.

Теорема 1. *Якщо $G(R(x,\xi),y,\eta)$ - фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичного рівняння (28), то фундаментальна матриця розв'язків для системи (25) має структуру:*

$$E(x,\xi,y,\eta)=\Theta\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n};\Lambda_{(\mu)}\Big)G(R(x,\xi),y,\eta). \tag{30}$$

Доведення. Згідно формули (21) фундаментальний розв'язок

$$G(R(x,\xi),y,\eta)=-\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\varphi_{(\mu)}(y,\beta,\beta)}{P_{2m\ell}(-\lambda^2,-\beta^2)}j_{(n-2)/2}(\lambda R(x,\xi))\lambda^{n-1}d\lambda d\beta, \tag{31}$$

Тоді безпосередньо одержуємо, що

$$AE=A\Theta G=P_{2m\ell}\Big(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\Big)GE_\ell=$$

$$=-\delta(x-\xi)\otimes(sh\eta)^{-1}\delta(y-\eta)E_\ell\equiv-\delta_{(\xi,\eta)}E_\ell.$$

Аналогічно одержуються теореми про структуру фундаментальних матриць розв'язків для інваріантних систем (25) на ріманових многовидах $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$.

Означення 3. m-розгалуженою (нескінченно розгалуженою) фундаментальною матрицею розв'язків з гіперплощиною галуження $(0,0)\times E^+_{n-1}$ для системи (25) називається така фундаментальна матриця розв'язків $E_{(m)}(x,\xi,y,\eta)$ $(E_{(\infty)}(x,\xi,y,\eta))$, яка в $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ визначена всюди, крім гіперплощини галуження, й задовольняє такі умови:

1) $E_{(m)}(x,\xi,y,\eta)$ має в $\overset{+(m)}{R}_{n+1}$ одну характеристичну особливість в точці $(\xi,\eta)\in\overset{+(1)}{R}_{n+1}\equiv E^+_{n+1}$;

2) $E_{(m)}$ $(m\in[2,\infty])$ нескінченно диференційована всюди, крім точки $(\xi,\eta)\in E^+_{n+1}$ та гіперплощини галуження;

3) $\sum\limits_{k=1}^{m}E_{(m)}(x,\xi^k,y,\eta)=E(x,\xi,y,\eta)$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_{(\infty)}(x,\xi^k,y,\eta)=E(x,\xi,y,\eta)\right),$$

де $(\xi^1,\eta)\equiv(\xi,\eta)$, а точки $(\xi^k,\eta)\in\overset{+(k)}{R}_{n+1}$ лежать на тому ж місці, що й точка (ξ,η), але в екземплярі $\overset{+(k)}{R}_{n+1}$,; $E(x,\xi,y,\eta)$ - звичайна фундаментальна матриця розв'язків.

Теорема 2. *Якщо $G_{(m)}(R(x,\xi),y,\eta)$ є m-розгалужений фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичного рівняння (28), то m-розгалужена фундаментальна матриця розв'язків $E_{(m)}$ для системи (25) визначається формулою:*

$$E_{(m)}(x,\xi,y,\eta)=\Theta\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n};\Lambda_{(\mu)}\Big)G_{(m)}(R(x,\xi),y,\eta). \tag{32}$$

Доведення. Згідно формули (24) фундаментальний розв'язок

$$G_{(m)}(R(x,\xi),y,\eta) = -\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\varphi_{(\mu)}(y,\beta,\beta)}{P_{2m\ell}(-\lambda^2,-\beta^2)}\Phi_m(\lambda,R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \quad (33)$$

Безпосередньо маємо, що

$$AE_m = A\Theta G_{(m)} = P_{2m\ell}\Big(\Delta,\Lambda_{(\mu)}\Big)G_{(m)}(R(x,\xi),y,\eta)E_\ell =$$

$$= -\tilde{\delta}(x-\xi)\otimes(sh\eta)^{-1}\delta(y-\eta)E_\ell \equiv -\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)}E_\ell.$$

Властивості 1) та 2) очевидні. Доведення властивості 3) проводиться так, як в роботі [7] .

Теорема 3. *Якщо $G_{(\infty)}(R(x,\xi),y,\eta)$ є нескінченно розгалужений фундаментальний розв'язок для $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичного рівняння (28), то нескінченно розгалужена фундаментальна матриця розв'язків $E_{(\infty)}$ для системи (25) визначається формулою*

$$E_{(\infty)}(x,\xi,y,\eta) = \Theta\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n};\Lambda_{(\mu)}\Big)G_{(\infty)}(R(x,\xi),y,\eta). \quad (34)$$

Доведення проводиться за логічною схемою роботи [7].

1. *Ш*илов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. -М.: Наука, 1965. -328с.
2. *Ш*естопал А.Ф. Интегральные преобразования с неразделенными переменными. -Киев, 1973. -46. -(Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 73.6).
3. *В*ирченко Н.А., Федотова И.А. Обобщенные функции Лежандра и их применение. -Киев, 1998. -158с.
4. *К*онет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. -Чернівці: Прут, 2002. -248с.
5. *Ш*варц Л. Математические методы для физических наук. -М.: Мир, 1965. -412с.
6. *Б*охнер С. Лекции об интегралах Фурье. -М.: Физматгиз, 1962г. -360с.
7. *Л*енюк М.П. Розгалужені фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних параболічних рівнянь і систем рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. -Київ: Ін-т математики, 1995. -Вип.8. -С.105-114.

Чернівецький національний університет
вул.Коцюбинського, 2
58012, м. Чернівці, Україна
Отримано 17.01.2005